



OLIMPÍADA PARANAENSE
DE MATEMÁTICA

OPRM 2024

Nível 3 (Ensino Médio)

Primeira Fase

14 ou 15 de junho

Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: _____

Escola: _____

Fiscal: _____

INSTRUÇÕES

- Escreva o seu nome, o nome da sua escola e o nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 8 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou algum problema faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta a qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Você pode fazer seus cálculos e anotações ao longo deste caderno de questões. Além disso, há uma página de rascunho no verso da prova.
- As respostas finais devem ser marcadas **com cuidado** na Folha de Respostas.
- Só serão consideradas as respostas assinaladas na Folha de Respostas. O que você escrever neste caderno de questões ou em folhas de rascunho não será considerado para fins de avaliação.
- Ao finalizar a prova, entregue ao **FISCAL** a Folha de Respostas, o caderno de questões e as folhas de rascunho que você eventualmente tenha usado.

BOA PROVA!

1. Quantas soluções reais tem a equação

$$\operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) = 0 \quad ?$$

- (A) Nenhuma.
(B) Uma.
(C) Duas.
(D) Três.
(E) ► Infinitas.

2. Seja x um número real diferente de 0. Se $x + \frac{1}{x} = c$, então $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é igual a:

- (A) $c^2 - 2$.
(B) ► $c^3 - 3c$.
(C) $c^3 - 3$.
(D) c^3 .
(E) $c^3 + \frac{1}{c^3}$.

3. Sabendo que os ângulos internos de um quadrilátero estão numa progressão aritmética, a soma do menor ângulo interno com o maior ângulo interno é igual a:

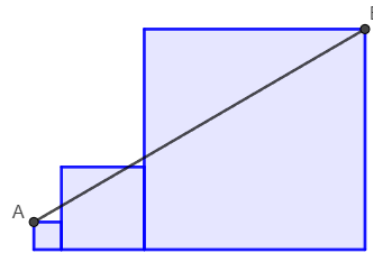
- (A) 90° .
(B) 120° .
(C) 144° .
(D) ► 180° .
(E) 270° .

4. Se r_1 e r_2 são raízes não nulas de $x^2 + ax + b$, então quanto vale $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$?

- (A) ► $\frac{-a}{b}$.
(B) $\frac{-b}{a}$.
(C) $\frac{-1}{b}$.
(D) $\frac{-1}{a}$.
(E) $\frac{-a^2}{b^2}$.

5. Os lados dos três quadrados indicados na figura abaixo estão em progressão geométrica com razão positiva. Sabendo que o lado do menor dos quadrados vale 2 e o lado do maior dos quadrados vale 18, determine o comprimento do segmento \overline{AB} .

- (A) 34.
 (B) $6\sqrt{34}$.
 (C) $10\sqrt{10}$.
 (D) $\blacktriangleright 2\sqrt{233}$.
 (E) $4\sqrt{41}$.



6. Quantas soluções inteiras positivas tem a equação $x + y + z = 15$?

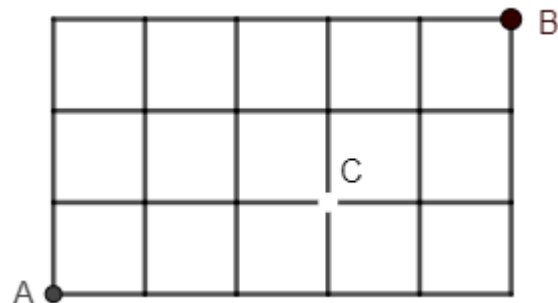
- (A) 45.
 (B) 65.
 (C) $\blacktriangleright 91$.
 (D) 136.
 (E) 182.

7. Em uma certa semana, a previsão do tempo é de que chova em 4 dos 7 dias. Qual a probabilidade de não chover por 3 dias consecutivos?

- (A) $\frac{6}{7}$.
 (B) $\frac{1}{168}$.
 (C) $\frac{167}{168}$.
 (D) $\blacktriangleright \frac{1}{7}$.
 (E) $\frac{17}{35}$.

8. Uma pessoa está no ponto A indicado na imagem e quer chegar no ponto B, ela só pode andar em cima das linhas indicadas e só pode ir para cima e para a direita. De quantas formas ela pode fazer isso sem passar pelo buraco indicado no ponto C?

- (A) 16.
 (B) 24.
 (C) 28.
 (D) $\blacktriangleright 32$.
 (E) 56.



9. Sejam $a = \text{mdc}(2024, 123456)$ e $b = \text{mmc}(16, 14)$. Determine $\frac{a}{b}$.

(A) $\frac{1}{14}$.

(B) $\frac{1}{56}$.

(C) $\frac{1}{7}$.

(D) $\frac{2}{7}$.

(E) $\frac{4}{7}$.

10. Qual a razão entre a área de um hexágono regular de lado L e o círculo que o circunscribe?

(A) 6π .

(B) $\frac{1}{3\pi}$.

(C) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

(E) $\frac{2\pi}{3}$.

11. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3x & 2y - 4 \\ y & x & 3 \\ 2x & 3 & 4y \end{pmatrix}.$$

Sabendo que A é uma matriz simétrica, o valor da soma dos elementos da diagonal principal de A é:

(A) 2.

(B) 9.

(C) 15.

(D) 16.

(E) 24.

12. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quantos subconjuntos de A com uma quantidade prima de elementos possui apenas elementos que não são números primos?

(A) 21.

(B) 26.

(C) 35.

(D) 41.

(E) 47.

13. De quantas maneiras 4 meninos e 5 meninas podem se sentar numa mesa redonda com 9 lugares de modo que não haja dois meninos sentados um ao lado do outro?
- (A) 126.
(B) 576.
(C) ► 2880.
(D) 5740.
(E) 14400.
14. O triângulo ABC é equilátero e O é seu ortocentro. A razão da área do triângulo ABC pela área do triângulo ABO é:
- (A) $\frac{1}{6}$.
(B) $\frac{1}{3}$.
(C) 2.
(D) ► 3.
(E) 6.
15. Se x_0, x_1, x_2 são raízes não nulas de $x^3 + ax^2 + bx + c$, qual dos seguintes polinômios tem $\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ como raízes?
- (A) $ax^3 - bx^2 + cx - 1$.
(B) $ax^3 - bx^2 + 1x - c$.
(C) $bx^3 - 1x^2 + ax - c$.
(D) ► $cx^3 - bx^2 + ax - 1$.
(E) $1x^3 - ax^2 + cx - b$.

16. Seja $S = [a, b]$ o espaço solução da equação

$$|x - 2| + |x + 3| = 5.$$

Determine $a + b$.

- (A) -3.
(B) ► -1.
(C) 0.
(D) 1.
(E) 3.

17. O sistema hexadecimal é um sistema de numeração posicional que representa os números em base 16, portanto empregando 16 símbolos. Devido ao sistema decimal geralmente usado para a numeração apenas de dez símbolos, deve-se incluir seis letras adicionais para completar o sistema. O conjunto de símbolos é então

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\},$$

em que na base decimal, temos que A corresponde a 10, B corresponde a 11, C corresponde a 12, D corresponde a 13, E corresponde a 14 e F corresponde a 15. Por exemplo, o número 677 na escala decimal representa que

$$677 = 6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 7.$$

Este número no sistema hexadecimal é igual a 2A5, pois

$$2 \times 16^2 + A \times 16 + 5 = 2 \times 256 + 10 \times 16 + 5 = 512 + 160 + 5 = 677.$$

O número no sistema decimal 2024, ao ser escrito no sistema hexadecimal é igual a:

- (A) BD0.
- (B) 7C8.
- (C) 400.
- (D) ► 7E8.
- (E) 0E0.

18. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} \\ f(n) = f(n-1) + \frac{1}{n(n+1)} \end{cases} \text{ se } n \text{ é natural maior que } 1.$$

Quanto vale $f(2023)$?

- (A) $\frac{2024}{2023^2 - 1}$.
- (B) $\frac{2023^2 - 1}{2024}$.
- (C) ► $\frac{2023}{2024}$.
- (D) 1.
- (E) Nenhuma das alternativas.

19. Dona Regina tem 3 netos, Ana, Beatriz e Carlos. Toda vez que os três vão conversar com ela, apenas um deles fala a verdade. Em um dia, houve 2 diálogos entre os quatro. De manhã os três chegaram para ela e falaram:

- Ana: Eu vou sair hoje de tarde.
- Beatriz: Eu não vou sair hoje de tarde.
- Carlos: Só uma pessoa vai sair hoje de tarde.

No final do dia, os três chegaram para ela e falaram:

- Ana: Hoje eu não saí.
- Beatriz: Hoje eu saí.
- Carlos: Mais de uma pessoa saiu hoje.

Então, podemos afirmar que:

- (A) Ana e Beatriz saíram.
- (B) Beatriz e Carlos saíram.
- (C) Ana e Carlos saíram.
- (D) ► Nenhum dos três saiu.
- (E) Todos saíram.

20. Sabendo que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui apenas uma raiz real e que $a > 0$, determine a área do triângulo AOB indicado abaixo, em que A é a interseção do gráfico de f com o eixo y , B é a interseção do gráfico de f com o eixo x e $O = (0, 0)$.

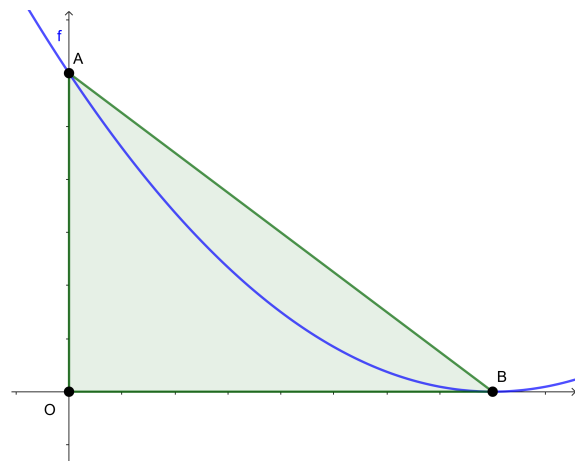
(A) ► $-\frac{bc}{4a}$.

(B) $\frac{bc}{4a}$.

(C) $\frac{bc}{2a}$.

(D) $-\frac{bc}{2a}$.

(E) $\frac{bc}{a}$.



RASCUNHO